

# 超临界 CO<sub>2</sub> 动力循环热量流模型与高效求解方法

辛永琳 赵 甜 孙清晗 李 霞 陈 群

(清华大学工程力学系, 热科学与动力工程教育部重点实验室, 北京 100084)

**摘 要** 超临界 CO<sub>2</sub> 动力循环结构紧凑、效率更高, 然而工质物性变化剧烈, 工质输运与能量传递等多种非线性过程相互耦合, 导致传统建模和求解复杂, 难以实现精确、高效模拟。本文基于超临界 CO<sub>2</sub> 动力循环的热量流模型, 提出一种基于广义 Benders 分解的高效求解算法, 将系统控制方程按线性、(显式/隐式) 非线性等数学性质分类处理, 利用变量梯度信息迭代更新。相比于传统算法, 新方法鲁棒性更好, 收敛域扩大 48%; 当迭代初值偏差较小时, 计算效率更高。

**关键词** 超临界 CO<sub>2</sub> 布雷顿循环; 广义 Benders 分解; 热量流法; 求解算法; 鲁棒性

中图分类号: TK123 文献标识码: A 文章编号: 0253-231X(2024)02-0535-08

## Heat Current Model and Efficient Solution Method for Supercritical CO<sub>2</sub> Power Cycle

XIN Yonglin ZHAO Tian SUN Qinghan LI Xia CHEN Qun

(Key Laboratory for Thermal Science and Power Engineering of Ministry of Education, Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract** Supercritical carbon dioxide (sCO<sub>2</sub>) power cycle has a more compact structure and higher efficiency. However, dramatic variations in thermophysical properties of working fluid and the coupling of multiple nonlinear physical processes such as fluid transport process and energy transfer process make conventional modelling and solving methods more difficult to simulate the cycle accurately and efficiently. This study constructs the heat current model of the sCO<sub>2</sub> power cycle and proposes an efficient solution algorithm based on the generalized Benders decomposition. The proposed algorithm categorizes system governing equations according to their linear or (explicit/implicit) nonlinear mathematical properties, and variables' gradient information is used to update unknown variables iteratively. Compared to conventional algorithms, the new solution method owns better robustness and has a 48% larger convergence range regarding the deviation of initial values. Besides, the proposed algorithm is more efficient when the initial value deviation is small.

**Key words** supercritical CO<sub>2</sub> Brayton cycle; generalized Benders decomposition; heat current method; solution algorithm; robust simulation

## 0 引 言

随着能源和环境问题日益突出, 对高效率能量转换系统的需求更为迫切。与常规蒸汽发电系统相比, 超临界二氧化碳 (sCO<sub>2</sub>) 发电循环的结构紧凑, 能量转换效率高, 在太阳能热发电系统<sup>[1]</sup>、燃煤电厂烟气余热利用<sup>[2]</sup>等领域具有广泛应用前景。

然而, CO<sub>2</sub> 在临界点附近物性变化剧烈, 为 sCO<sub>2</sub> 动力循环中能量传递和转化过程的求解和分析带来了困难。现有研究中, 通常对循环中各换热器进行分段<sup>[3]</sup>, 每小段中流体物性视为常数, 采用对数平均温差法或效能-传热单元数法进行建模求

解。这将引入大量中间温度, 显著增加模型的分析难度。对于系统模型构建, 则通过部件模型的直接叠加建立系统数学模型<sup>[4]</sup>。然而, sCO<sub>2</sub> 动力循环中部件的工质输运、能量传递和转换等多种非线性物理过程相互耦合, 工质物性剧烈变化使其流动、换热规律相互影响。通过现有方法建立的模型中间变量多, 非线性强, 不利于系统性能的准确高效分析。

为解决复杂热力系统准确建模与高效求解的难题, Chen 等<sup>[5]</sup>推导出基于进口温差的换热器热量流模型, 将传统模型驱动势的非线性因素转移至热

收稿日期: 2023-05-26; 修订日期: 2024-01-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.51836004, No.52125604)

作者简介: 辛永琳 (1996-), 女, 博士研究生, 主要从事综合能源系统分析与优化研究。

通信作者: 陈 群, 教授, chenqun@tsinghua.edu.cn。

阻中, 得到热量运输的驱动势与换热量的线性本构关系, 继而提出了热力系统整体热量流建模方法, 以构建系统的整体约束方程为核心, 通过电路原理和网络拓扑分析得到含有最少中间变量的系统约束 [6]。根据热量流模型可分离出线性的拓扑特征和非线性显式的元件特征两部分这一特性, Zhao 等 [7] 提出了分层-分治求解算法, 对控制方程按照数学性质分类处理: 采用矩阵运算求解线性拓扑约束, 通过直接代入计算显式非线性约束, 采用不动点迭代求解隐式非线性约束。实际算例表明, 相较于传统的联立方程法 [8], 分层-分治求解算法收敛范围和鲁棒性显著提升; 相较于序贯模块法 [9], 计算时间显著降低 [10]。

虽然分层-分治算法相较现有方法已经取得了显著的收敛范围和计算效率提升, 但仍有不足之处: 隐式非线性约束迭代的求解中仅采用简单不动点迭代, 未使用任何变量梯度信息, 计算效率及收敛性仍存在很大提升空间。此外, 迭代求解流程缺乏明确的设计原则, 依赖设计经验, 易造成不必要的计算效率损失。已有文献指出, 在优化问题中, 应当尽量多使用梯度信息, 或将梯度信息与非梯度方法结合, 以加速收敛过程 [11]。综合现状可见, 亟需提出一种既具备分层-分治算法的优势, 又能够利用梯度信息加速迭代更新的 sCO<sub>2</sub> 动力循环高效求解方法。

Geoffrion [12] 将 Benders 分解方法 [13] 推广至复杂非线性规划问题的求解, 其基本思想是将待求问题分解为更易求解的子问题和具有线性规划形式的主问题。求解子问题可得到含有局域变量梯度信息的 Benders 割集, 并以其构造、更新主问题。交替求解主、子问题, 迭代至收敛, 即可得到原问题的最优解 [12,14]。这一算法已广泛应用于电力系统机组组合、配电网规划等大规模混合整数规划问题的求解 [15]。

本文以 sCO<sub>2</sub> 再压缩布雷顿循环为研究对象, 构建能准确反映其热量传递与转换特性的整体热量流模型, 并基于广义 Benders 分解, 提出一种新的高效求解框架和方法, 充分利用约束中的梯度信息, 实现循环的准确建模与高效、稳健求解。

## 1 超临界 CO<sub>2</sub> 再压缩系统模型构建

### 1.1 系统物理模型

图 1 给出了一个典型的 sCO<sub>2</sub> 再压缩布雷顿闭式循环发电系统, 其中 LTR 出口处 (10 点) 的流体分为两路, 一路直接进入再压缩机 (RC) 被压缩, 另一路进入预冷器 (PRC) 被冷却, 之后进入主压缩

机 (MC) 被压缩, 流经 LTR 吸热, 在 4 点与 RC 出口的流体混合。由于 LTR 高压冷侧流体的比热容远大于低压热侧流体, 这种分流方式能够调整 LTR 高压冷侧的质量流量, 起到补偿两股流体比热容差的作用, 提高回热器的换热性能。循环中换热器均采用套管式逆流换热器。分析中采用以下假设: 系统稳态运行; 透平和压缩机中的绝热膨胀、压缩过程等熵效率恒定; 10 点分流过程不改变 CO<sub>2</sub> 流体的热力学状态; 4 点的混合过程为理想混合, 不考虑压力损失。

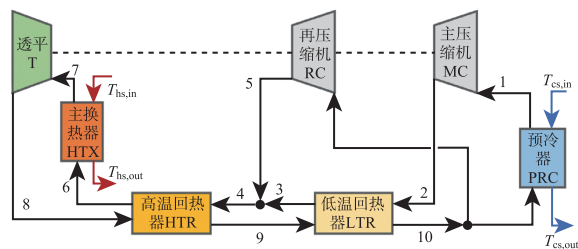


图 1 sCO<sub>2</sub> 再压缩布雷顿循环系统结构图

Fig. 1 Structural diagram of a sCO<sub>2</sub> recompression Brayton cycle

### 1.2 系统热量流模型

#### 1.2.1 变物性换热器的热量流模型

Zhao 等 [5] 构建了变物性逆流换热器热量流模型, 给出了基于进口温差的热阻定义式及热动势的定义式, 将非线性隐式传热约束拆分为流体温差与换热量之间的线性输运定律和热阻的非线性显式表达式:

$$R = \frac{T_{h,in} - T_{c,in}}{Q} = \frac{(mc_p)_c \exp(KA/(mc_p)_h) - (mc_p)_h \exp(KA/(mc_p)_c)}{(mc_p)_h (mc_p)_c [\exp(KA/(mc_p)_h) - \exp(KA/(mc_p)_c)]} \quad (1)$$

$$\varepsilon_h = Q/(mc_p)_h \quad (2)$$

$$\varepsilon_c = Q/(mc_p)_c \quad (3)$$

式中,  $R$  为基于进口温差的换热器热阻,  $Q$  为换热量,  $T$  表示流体温度, 下标  $h$  和  $c$  分别代表热流体和冷流体, 下标  $in$  和  $out$  分别表示进口和出口,  $m$  和  $c_p$  分别是工质的质量流量和比定压热容,  $K$  和  $A$  分别是换热器的传热系数和换热面积,  $\varepsilon$  是附加热动势, 代表换热器两侧流体的温度变化。

系统中使用的套管式逆流换热器结构如图 2 所示,  $L$  为换热器长度,  $r_1$ 、 $r_2$ 、 $r_3$  分别为换热器内

管内半径、内管外半径和外管内半径。超临界 CO<sub>2</sub> 的密度、比热容等物性参数随温度连续变化, 因此将 HTR、LTR 及 PRC 按照面积均匀划分为  $N$  段, 认为在每个换热单元中流体物性不变, 可用常物性换热器模型描述。依据 Li 等<sup>[16]</sup> 和 Chen 等<sup>[17]</sup> 提出的变物性换热器热量流建模方法, 构建如图 3 所示的换热器分段热量流模型, 将温度节点、热阻和换热量表示为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} T_{h,in} - T_{c,in} \\ \vdots \\ T_{h,in} - T_{c,in} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_M \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_i \\ Q_N \end{bmatrix} \quad (4)$$

根据电路原理中的基尔霍夫定律或图论原理, 邻接矩阵  $\mathbf{R}_M$  的表达式为:

$$\mathbf{R}_M(i, j) = \begin{cases} R_i, & i = j \\ 1/(mc_p)_{h,j}, & i < j, i = 1 \cdots N, j = 1 \cdots N \\ 1/(mc_p)_{c,j}, & i > j \end{cases} \quad (5)$$

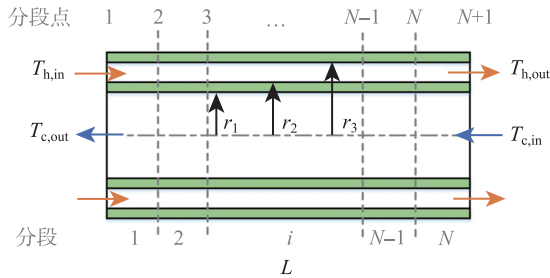


图 2 套管式逆换热器结构示意图

Fig. 2 Schematic diagram of a concentric heat exchanger

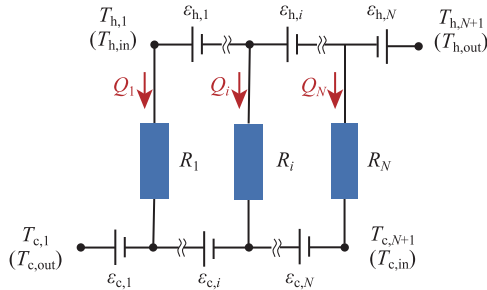


图 3 变物性换热器的分段热量流模型

Fig. 3 Heat current diagram of the heat exchanger with fluid property variation

系统中 4 个换热器的传热系数采用与文献<sup>[16]</sup>中采用的经验关联式计算, 不同温度和压力下的 CO<sub>2</sub> 物性通过查询 CoolProp 物性库得到。

### 1.2.2 热功转换过程

sCO<sub>2</sub> 在透平中绝热膨胀, 等熵效率恒定, 其控制方程为:

$$s_8 = s(T_7, p_7) \quad (6)$$

$$h_8 = h(T_7, p_7) - \eta_T [h(T_7, p_7) - h(s_8, p_8)] \quad (7)$$

$$W_T = m [h(T_7, p_7) - h_8] \quad (8)$$

在热量流模型中, 工质热功转换过程中的温度变化也以热动势表示:

$$\varepsilon_T = T_7 - T_8 = T_7 - T(h_8, p_8) \quad (9)$$

与式 (2)、(3) 不同, 此处热动势的取值由热力学约束确定。

类似地, 工质在 MC 和 RC 中绝热压缩过程的控制方程为:

$$s_2 = s(T_1, p_1) \quad (10)$$

$$h_2 = h(T_1, p_1) + [h(s_2, p_2) - h(T_1, p_1)]/\eta_{MC} \quad (11)$$

$$W_{MC} = m(1-x)[h_2 - h_1(T_1, p_1)] \quad (12)$$

$$\varepsilon_{MC} = T_2 - T_1 = T(h_2, p_2) - T_1 \quad (13)$$

$$s_5 = s(T_{10}, p_{10}) \quad (14)$$

$$h_5 = h(T_{10}, p_{10}) + [h(s_5, p_5) - h(T_{10}, p_{10})]/\eta_{RC} \quad (15)$$

$$W_{RC} = mx[h_5 - h_{10}(T_{10}, p_{10})] \quad (16)$$

$$\varepsilon_{RC} = T_5 - T_{10} = T(h_5, p_5) - T_{10} \quad (17)$$

上述方程中, 下标的数字对应图 1 中的状态点编号, 下标 T、MC、RC 分别表示透平、主压缩机、再压缩机的参数;  $p$ 、 $s$ 、 $h$  分别为状态点压力、比熵和比焓,  $x$  代表直接流向再压缩机流体的质量分数,  $\eta$  代表等熵效率,  $W$  表示做功部件的功率。

### 1.2.3 流体混合过程

sCO<sub>2</sub> 在 10 点分为两路, 而后 3 点的主流量和 5 点的再压缩流量在 4 点混合。此理想混合过程的热力学方程为:

$$h_4 = (1-x)h(T_3, p_3) + xh_5 \quad (18)$$

在热量流模型中, 混合过程的温度变化用热动势表示为:

$$\varepsilon_{4,3} = T_4 - T_3 = T(h_4, p_4) - T_3 \quad (19)$$

$$\varepsilon_{5,4} = T_5 - T_4 = T_5 - T(h_4, p_4) \quad (20)$$

### 1.2.4 系统整体热量流模型

根据热力系统整体热量流模型的构建方法及电路等效简化原则,可建立循环的整体热量流模型,如图 4 所示。根据基尔霍夫电压定律 (KVL) 列出系统控制方程:

$$Q_{\text{HTR},i} R_{\text{HTR},i} + \frac{Q_{\text{HTR},i+1}}{(mc_p)_{\text{HTR},c,i+1}} - Q_{\text{HTR},i+1} R_{\text{HTR},i+1} - \frac{Q_{\text{HTR},i}}{(mc_p)_{\text{HTR},h,i}} = 0, \quad (21)$$

$$i = 1, \dots, N_{\text{HTR}} - 1$$

$$Q_{\text{LTR},i} R_{\text{LTR},i} + \frac{Q_{\text{LTR},i+1}}{(mc_p)_{\text{LTR},c,i+1}} - Q_{\text{LTR},i+1} R_{\text{LTR},i+1} - \frac{Q_{\text{LTR},i}}{(mc_p)_{\text{LTR},h,i}} = 0, \quad (22)$$

$$i = 1, \dots, N_{\text{LTR}} - 1$$

$$\frac{Q_{\text{PRC},i}}{(mc_p)_{\text{PRC},h,i}} - Q_{\text{PRC},i} R_{\text{PRC},i} - \frac{Q_{\text{PRC},i-1}}{(mc_p)_{\text{PRC},c,i-1}} + Q_{\text{PRC},i-1} R_{\text{PRC},i-1} = 0, \quad (23)$$

$$i = 2, \dots, N_{\text{PRC}}$$

$$\frac{Q_{\text{PRC},i}}{(mc_p)_{\text{PRC},h,i}} - Q_{\text{PRC},i} R_{\text{PRC},i} - \frac{Q_{\text{PRC},i-1}}{(mc_p)_{\text{PRC},c,i-1}} + Q_{\text{PRC},i-1} R_{\text{PRC},i-1} = 0, \quad (24)$$

$$i = 2, L, N_{\text{PRC}}$$

$$Q_{\text{HTR},N} R_{\text{HTR},N} + \varepsilon_{4,3} + \frac{Q_{\text{LTR},1}}{(mc_p)_{\text{LTR},c,1}} - Q_{\text{LTR},1} R_{\text{LTR},1} - \frac{Q_{\text{HTR},N}}{(mc_p)_{\text{HTR},1,N}} = 0 \quad (25)$$

$$Q_{\text{LTR},N} R_{\text{LTR},N} - \frac{Q_{\text{LTR},N}}{(mc_p)_{h,N,\text{LTR}}} - \sum_{i=1}^{N_{\text{PRC}}} \frac{Q_{\text{PRC},i}}{(mc_p)_{h,i,\text{PRC}}} + \varepsilon_{\text{MC}} = 0 \quad (26)$$

$$T_{\text{hs},\text{in}} - Q_{\text{HTX}} R_{\text{HTX}} + \frac{Q_{\text{HTX}}}{(mc_p)_{c,\text{HTX}}} - \varepsilon_{\text{T}} - \sum_{i=1}^{N_{\text{HTR}}} \frac{Q_{\text{HTR},i}}{(mc_p)_{h,i,\text{HTR}}} - Q_{\text{LTR},N} R_{\text{LTR},N} - \sum_{i=1}^{N_{\text{LTR}}-1} \frac{Q_{\text{LTR},i}}{(mc_p)_{h,i,\text{LTR}}} - \varepsilon_{\text{MC}} + \frac{Q_{\text{PRC},1}}{(mc_p)_{h,1,\text{PRC}}} - Q_{\text{PRC},1} R_{\text{PRC},1} = T_{\text{cs},\text{in}} \quad (27)$$

式中,  $N_{\text{HTR}}$ 、 $N_{\text{LTR}}$ 、 $N_{\text{PRC}}$  分别为 HTR、LTR、PRC 的划分段数, 本研究中均取 100; 下标 hs、cs 分别表示系统的热源和冷源。式 (21)~(23) 分别为 3 个换热器内部相邻换热单元的 KVL 方程, 式 (24)~(26) 表示不同换热部件、热功转换部件之间的 KVL 方程, 以上  $N_{\text{HTR}} + N_{\text{LTR}} + N_{\text{PRC}} + 1$  个控制方程反映了系统整体传热约束。其他中间状态点的温度可应用 KVL 或能量守恒方程得到:

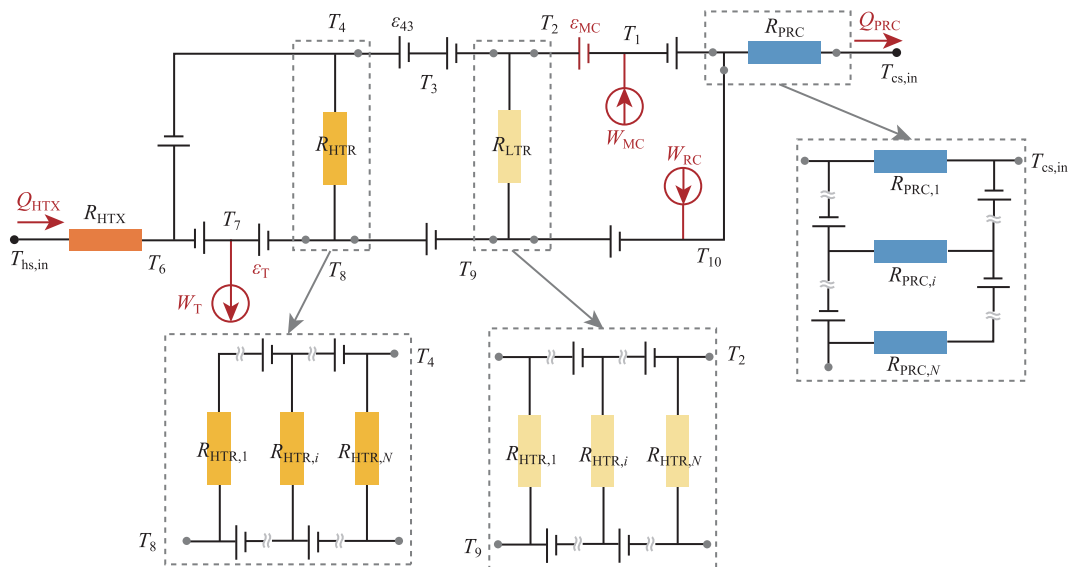


图 4 sCO<sub>2</sub> 再压缩系统热量流模型

Fig. 4 Heat current model of the sCO<sub>2</sub> recompression cycle

$$T_3 = T_2 + \sum_{i=1}^{N_{LTR}} Q_{LTR,i} / (mc_p)_{c,LTR,i} \quad (28)$$

$$T_6 = T_{hs,in} - Q_{HTX} R_{HTX} \quad (29)$$

$$T_9 = T_8 - \sum_{i=1}^{N_{HTR}} Q_{HTR,i} / (mc_p)_{h,HTR,i} \quad (30)$$

$$T_1 = T_{cs,in} + Q_{PRC,1} R_{PRC,1} - Q_{PRC,1} / (mc_p)_{PRC,h,1} \quad (31)$$

$$T_7 = T_{hs,in} - Q_{HTX} R_{HTX} + Q_{HTX} / (mc_p)_{c,HTX} \quad (32)$$

$$T_{10} = T_1 + \sum_{i=1}^{N_{PRC}} Q_{PRC,i} / (mc_p)_{h,PRC,i} \quad (33)$$

### 1.3 工质流动模型

对于 sCO<sub>2</sub> 闭式循环, 工质的压差驱动其流经各部件, 进行传热及热功转换过程。这两个过程又对工质的压力分布产生影响, 三者相互耦合。sCO<sub>2</sub> 流经透平的前后压差和其质量流量的关系可通过弗留格尔公式描述<sup>[18]</sup>:

$$m = k_t \sqrt{(p_7^2 - p_8^2) / T_7} \quad (34)$$

式中,  $k_t$  表示透平的特征通流系数。

假设工质在 HTX、HTR、LTR 和 PRC 中的加热或冷却过程的压力损失呈线性分布, 流经换热器的压力损失  $\Delta p_{loss}$  与进口压力呈比例关系<sup>[19]</sup>, 则在换热器内部任意位置  $r$  的压力可表示为  $p_r$ :

$$\Delta p_{loss} = p_{in} - p_{out} = p_{in} f_P \quad (35)$$

$$p_r = p_{in} - r \cdot \Delta p_{loss} / l \quad (36)$$

其中,  $f_P$  为压力损失系数,  $l$  为换热器长度。

对于 MC 和 RC, 可通过直接调整轴速来满足通过压缩机的工质压力变化和质量流量要求, 压缩机轴转速与循环工质的压力变化、质量流量的关系见文献 [4]。式 (1)~(36) 共同构成系统的控制方程。

## 2 基于广义 Benders 分解的系统高效求解方法

基于广义 Benders 分解算法框架, 结合分层—分治算法思想, 本文提出一种利用梯度信息提高计算收敛性的 sCO<sub>2</sub> 再压缩发电系统高效求解方法, 具体步骤如下。

### 1) 构造系统模拟的等价非线性规划问题

按照约束方程的数学性质, 以系统模型中所有非线性方程残差的平方和为目标函数, 以所有线性

方程为约束条件, 将上述 sCO<sub>2</sub> 再压缩系统模型求解问题转化为非线性规划问题。

### 2) 原始问题分解

选择非线性方程的所有自变量作为复杂变量  $y$ :  $y = \{p_7, T_1, T_2, T_3, T_5, T_7, T_8, T_{10}\}$ , 其他变量记为  $v$ , 将非线性规划问题分解为子问题和主问题。此外, 为了避免子问题超定, 需向目标函数中添加线性方程约束, 使得目标函数的项数与复杂变量个数相同。最终, 构建的非线性规划问题如式 (37) 所示:

$$\begin{aligned} \min f = & \left( m - k_t \sqrt{\frac{p_7^2 - p_8^2}{T_7}} \right)^2 + \\ & (T_2 - T_2')^2 + (T_4 - T_4')^2 + \\ & (T_5 - T_5')^2 + (T_8 - T_8')^2 + \\ & \left( T_{10} - T_1 - \sum_{i=1}^{N_{PRC}} \frac{Q_{PRC,i}}{(mc_p)_{h,PRC,i}} \right)^2 + \\ & \left( T_c + Q_{PRC,1} R_{PRC,1} - \frac{Q_{PRC,1}}{(mc_p)_{PRC,h,1}} - T_1 \right)^2 + \\ & \left( T_h - Q_{HTX} R_{HTX} + \frac{Q_{HTX}}{(mc_p)_{HTX,c}} - T_7 \right)^2 \\ \text{s.t. } & \begin{cases} g = \{\text{式(21)} \sim (30)\} \\ y \in [y_{\min}, y_{\max}] \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

其中,  $T_2', T_4', T_5', T_8'$  的计算式如式 (38) 所示, 各式中状态点的比焓由式 (6)~(18) 中的热功转换过程方程和流体混合能量守恒方程得到:

$$T_i' = T(p_i, h_i), \quad i = 2, 4, 5, 8 \quad (38)$$

### 3) 求解子问题

在给定的  $y = y^k$  下求解非线性规划问题。由于本问题中的约束方程组  $g$  均为线性无关的等式约束, 因此在给定  $y = y^k$  后,  $g$  有唯一解, 即子问题必有可行解。将解记为  $v = v^k$ , 求出当前的  $f$ , 更新原始问题的上界  $UB$ :

$$UB_k = \min(UB_{k-1}, f) \quad (39)$$

基于当前子问题的解, 向主问题添加最优割 (Optimality cut):

$$\begin{aligned} z \geq & L(v^k, y^k, u^k) + \\ & \nabla_y^T L(v^k, y^k, u^k) \cdot (y - y^k) \end{aligned} \quad (40)$$



其中,  $z$  为引入的松弛变量,  $L$  为非线性规划问题的广义 Lagrange 函数,  $\nabla_y L$  为  $L$  关于复杂变量  $y$  的梯度,  $u$  为 Lagrange 乘子向量:

$$L(v, y, u) = f - u^T g \quad (41)$$

$$\nabla_y^T L(v, y, u) = \frac{\partial f(v, y)}{\partial y} - u^T \frac{\partial g}{\partial y}$$

4) 更新主问题并求解。

主问题是线性规划问题, 目标函数为  $z$ , 约束为求解各子问题得到的最优割集合:

$$\begin{aligned} \min z \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} z \geq L(v^1, y^1, u^1) - \nabla_y^T L(v^1, y^1, u^1) \cdot (y - y^1) \\ \vdots \\ z \geq L(v^k, y^k, u^k) - \nabla_y^T L(v^k, y^k, u^k) \cdot (y - y^k) \\ \vdots \\ z \geq L(v^n, y^n, u^n) - \nabla_y^T L(v^n, y^n, u^n) \cdot (y - y^n) \end{cases} \end{aligned} \quad (42)$$

求解主问题即可更新复杂变量  $y$ 。由于主问题相当于松弛的原始问题, 其最优解总小于原始问题的最优解, 因而用其更新原问题最优解的下界  $LB$ :

$$LB_k = \max(LB_{k-1}, z) \quad (43)$$

一般地认为对于非凸优化问题, 当  $|UB-LB| < \delta$  ( $\delta > 0$ ), 且变量在相邻迭代两次之间变化不大时, 迭代收敛。考虑到本文中目标函数是约束的残差, 收敛准则选定为  $|UB-LB| < \delta$  ( $\delta > 0$ ) 且目标函数每一项  $f(i)$  都小于给定的阈值  $\varepsilon_i$  ( $\varepsilon_i > 0$ )。迭代流程如图 5 所示。

另外, 由于系统模型中变量的数量级差别较大, 因此本文采用数据归一化的处理方法, 增强算法的收敛性。选取  $T_n$ 、 $p_n$ 、 $m_n$ 、 $c_{p,n}$  作为各类变量的基准值, 将迭代中的所有变量归一化, 如式 (44) 所示。归一化中, 上述基准值的具体取值只需与对应变量的数量级相同。此外, 子问题中目标函数的不同项也可能在迭代过程中数量级相差较大。因此, 在每一项前乘以自适应系数, 使得问题更容易收敛。

$$\begin{cases} T^* = T/T_n \\ p^* = p/p_n \\ m^* = m/m_n \\ c_p^* = c_p/c_{p,n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_t^* = k_t / \sqrt{T_n m_n^2 / p_n^2} \\ KA^* = KA / (m_n c_{p,n}) \\ R^* = R / (m_n c_{p,n}) \\ Q^* = Q / (T_n m_n c_{p,n}) \end{cases} \quad (44)$$

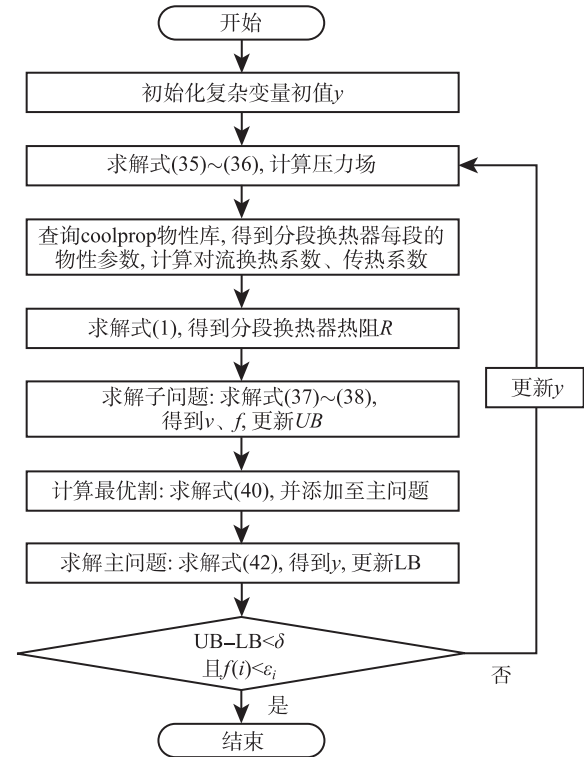


图 5 基于广义 Benders 分解的  $s\text{CO}_2$  再压缩系统求解流程  
Fig. 5 Calculation procedure of the proposed algorithm for the  $s\text{CO}_2$  system

### 3 结果分析及算法效果对比

#### 3.1 算法验证

在计算中,  $s\text{CO}_2$  再压缩系统冷、热源流体入口温度及热源流体的质量流量已知, 循环的最小循环压力也作为边界条件给定。系统运行中可调节的变量为 MC 及 RC 的轴转速以及冷源泵的频率, 相应地, 选取循环工质的质量流量  $m$ 、冷源质量流量  $m_{cs}$ 、和再压缩流体质量分数  $x$  为运行变量。给定以上边界条件及运行变量, 求解系统控制方程, 即可确定系统所有未知变量, 实现运行仿真。

为验证本文提出算法的准确性, 采用文献 [16]、[19] 中给出的换热器结构参数、边界条件和运行参数等数据, 并与文献 [19] 中的试验结果进行对比, 结果如表 1 所示, 其中下标 ref 表示文献 [19] 中的试验结果。

结果对比表明, 本文提出算法计算得到的温度场和压力场分布与试验结果一致, 最大相对误差不超过 0.32%, 从而验证了算法的正确性。

#### 3.2 算法比较

应用本算法与分层-分治算法, 在相同边界条件、结构参数以及初值下求解同一  $s\text{CO}_2$  再压缩系统, 其中分层-分治算法结果见文献 [16]。本文提出

表 1 所提算法计算结果与文献参考值对比

Table 1 Comparison between the present simulation results and reference values

状态点	$m/\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$	$T/\text{K}$	$T_{\text{ref}}/\text{K}$	$T$ 相对误差/%	$p/\text{MPa}$	$p_{\text{ref}}/\text{MPa}$	$p$ 相对误差/%
1	71.5	313.3	313.2	0.03	7.80	7.80	0
2	71.5	400.5	400.0	0.13	24.90	24.85	0.24
3	71.5	554.9	553.6	0.23	24.65	24.61	0.16
4	95.3	549.1	548.1	0.18	24.65	24.61	0.16
5	23.8	532.4	531.7	0.13	24.65	24.61	0.16
6	95.3	777.5	775.6	0.24	24.41	24.36	0.20
7	95.3	956.3	953.2	0.32	24.16	24.12	0.17
8	95.3	808.5	807.1	0.17	8.04	8.04	0
9	95.3	561.9	561.0	0.16	7.96	7.96	0
10	95.3	408.9	408.1	0.20	7.88	7.88	0

的 sCO<sub>2</sub> 动力循环的高效求解方法, 基于广义 Benders 分解框架, 结合分层-分治算法中约束方程按数学性质分类处理的思想, 并使用梯度信息进行非线性方程的更新迭代。下面对比分析两种算法的设计原则和计算效果。

#### 1) 求解算法的迭代设计原则

分层-分治算法要求将相同数量级的相同物理量置于同一迭代层, 且内层迭代需要工程计算经验辅助进行算法的流程设计。本文提出的新算法通过数据的归一化处理, 将所有变量变换至相同的数量级, 以约束方程的数学性质为唯一基准, 进行计算流程设计, 设计原则明确且不存在嵌套迭代。

#### 2) 算法的鲁棒性和计算效率

以上文中得到的精确解为基础, 比较基于广义 Benders 分解的求解算法和分层-分治算法的收敛范围。图 6 给出了两种算法在不同初值下收敛所需的迭代次数对比, 其中横轴为初值  $y_0$  偏离精确解  $y_{\text{acc}}$  的百分比  $j$ , 其定义见式 (45)。计算结果表明, 对于本文研究的 sCO<sub>2</sub> 再压缩系统求解问题, 分层-分治算法在初值偏离精确解 -21.3% 及 30.4% 以上时无法收敛, 即收敛范围为  $[-21.3\%, 30.4\%]$ , 而本文提出算法收敛范围则扩展到  $[-22.4\%, 54.1\%]$ 。相比于分层-分治算法, 本文提出的求解算法可使得 sCO<sub>2</sub> 再压缩系统求解问题的收敛域上界扩大 78%, 下界扩大 5%, 整个收敛域扩大 48%。

$$j = \frac{y^0 - y_{\text{acc}}}{y_{\text{acc}}} \times 100\% \quad (45)$$

对于计算时间, 两种算法单次迭代所需的时间都在毫秒-秒量级, 总体迭代时间与迭代次数成正比。在收敛域内, 分层-分治算法的计算时间在秒-分钟量级, 新算法的计算时间随着初值偏离精确解范围的扩大有所增加, 但仍在秒-分钟量级。此外, 图 6 淡黄色区域显示, 在初值偏离精确解较小时, 基于广义 Benders 分解的新求解算法计算效率明显

高于分层分治算法。图 7 给出了该区域的局部放大图, 当收敛范围在  $[-6.3\%, 3.2\%]$  时, 新算法在迭代收敛次数和计算时间上都有明显优势。因此, 当

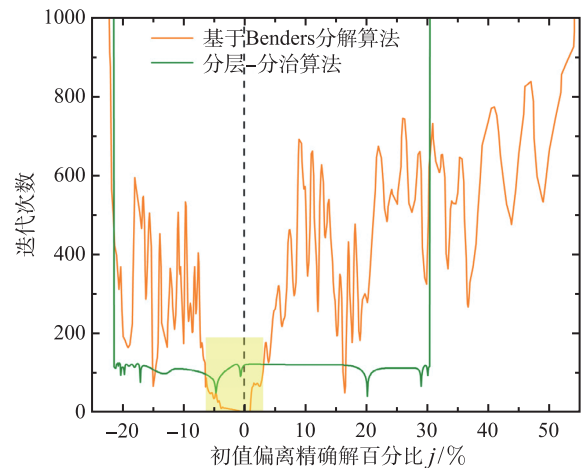


图 6 所提算法与分层-分治算法收敛域对比

Fig. 6 Comparison of convergence performance of proposed algorithm and hierarchical and categorized algorithm

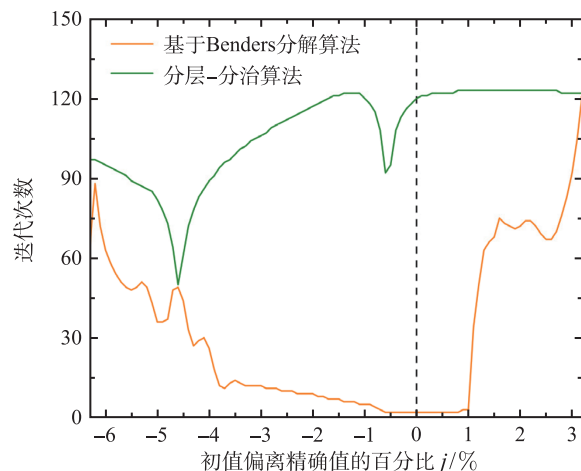


图 7 小收敛范围内两种算法计算效率对比

Fig. 7 Comparison of computational efficiency between the two algorithms within a small initial value deviation

系统运行工况偏离设计工况不大时,本文提出的求解算法更有优势。

## 4 结 论

针对变物性复杂热力系统难以同时兼顾精确建模与高效、稳定求解的问题,本文基于广义 Benders 分解框架,提出了一种新的高效求解方法,将系统控制方程按照数学性质分类处理,利用变量梯度信息进行迭代更新,从而加速系统求解,提高其收敛性。

以  $\text{sCO}_2$  再压缩布雷顿循环为例,首先应用热系统的热量流分析方法建立了系统整体热量流模型,完整反映了热量的整体输运和转换特性。并考虑工质流动、换热与热功转换过程的耦合关系,综合热量流和工质流视角,构建了系统的整体数学模型。

采用本文提出的算法求解系统模型,实现了其运行模拟,与试验数据对比,验证了算法的有效性和可靠性,并与分层-分治算法性能进行了比较。计算结果表明,在相同的边界条件、运行参数下,分层-分治算法的收敛范围为  $[-21.3\%, 30.4\%]$ ,而本文提出的求解算法可将收敛范围扩展到  $[-22.4\%, 54.1\%]$ ,在  $[-6.3\%, 3.2\%]$  的范围内计算效率更高。

## 参 考 文 献

- [1] 韩中合,赵林飞,韩旭.直接式超临界二氧化碳再压缩塔式光热发电系统关键参数优化[J].热力发电,2021,50(10): 21-29  
HAN Zhonghe, ZHAO Linfei, HAN Xu. Optimization of Key Parameters of Direct Supercritical Carbon Dioxide Recompression Tower Solar Thermal Power Generation System [J]. Thermal Power Generation, 2021, 50(10): 21-29
- [2] Mecheri M, Le Moullec Y. Supercritical  $\text{CO}_2$  Brayton Cycles for Coal-Fired Power Plants [J]. Energy, 2016, 103: 758-771
- [3] Xu Y C, Chen Q. A Theoretical Global Optimization Method for Vapor-Compression Refrigeration Systems Based on Entransy Theory [J]. Energy, 2013, 60: 464-473
- [4] Dyreby J J, Klein S A, Nellis G F, et al. Modeling Off-Design and Part-Load Performance of Supercritical Carbon Dioxide Power Cycles [C]//Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air. American Society of Mechanical Engineers, 2013: V008T34A014
- [5] Zhao T, Chen X, He K L, et al. A Standardized Modeling Strategy for Heat Current Method-Based Analysis and Simulation of Thermal Systems [J]. Energy, 2021, 217: 119403
- [6] 赵甜,陈曦,贺克伦,等.热力系统整体分析和优化的热量流法[J].中国科学:技术科学,2021,51: 1251-1274  
ZHAO Tian, CHEN Xi, HE KeLun, et al. Heat Current Method for Integrated Analysis and Optimization of Thermodynamic Systems [J]. Scientia Sinica(Technologica), 2021, 51: 1251-1274
- [7] Zhao T, Chen X, He K L, et al. A Hierarchical and Categorized Algorithm for Efficient and Robust Simulation of Thermal Systems Based on the Heat Current Method [J]. Energy, 2021, 215: 119105
- [8] Gwak J M, Kim M R, Hur T. Analysis of Internally Recurring Unit Processes in Life Cycle Assessment [J]. Journal of Cleaner Production, 2003, 11(7): 787-795
- [9] 汤志远,丁国良.涡旋式水源热泵系统性能仿真[J].制冷学报,2011,32(1): 33-37  
TANG Zhiyuan, DING Guoliang. Performance Simulation of Scroll Water Source Heat Pump System[J]. Journal of Refrigeration, 2011, 32(1): 33-37
- [10] Chen X, Zhao T, Chen Q. An Online Parameter Identification and Real-Time Optimization Platform for Thermal Systems and Its Application[J]. Applied Energy, 2022, 307: 118199
- [11] Sigmund O. On the Usefulness of Non-Gradient Approaches in Topology Optimization [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 43(5): 589-596
- [12] Geoffrion A M. Generalized Benders Decomposition [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1972, 10(4): 237-260
- [13] Benders J F. Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems [J]. Numerische Mathematik, 1962, 4: 238-252
- [14] 马游.基于广义 Benders 分解的电力系统最优机组投入研究[D].南宁:广西大学,2013  
MA You. A New Method to Solve Unit Commitment Problems in Power Systems Based on Generalized Benders Decomposition [D]. Nanning: Guangxi University, 2013
- [15] 黄河,高松,朱磊,等.考虑多能互补的主动配电网规划与高效 Benders 求解方法[J].中国电力,2019,52(6): 11-18  
HUANG He, GAO Song, ZHU Lei, et al. Active Distribution Network Planning Model and Benders Solution Strategy Considering Multi-energy Complementation [J]. Electric Power, 2019, 52(6): 11-18
- [16] Li X, Chen Q, Chen X, et al. Graph Theory-Based Heat Current Analysis Method for Supercritical  $\text{CO}_2$  power Generation System [J]. Energy, 2020, 194: 116911
- [17] Chen Q, Zhao S Y, Chen X, et al. The Power Flow Topology of Heat Transfer Systems at Supercritical Conditions for Performance Analysis and Optimization [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2018, 118: 316-326
- [18] Wang S, Liu Z, Liu C, et al. Thermodynamic Analysis of Operating Strategies for Waste Heat Recovery of Combined Heating and Power Systems [J]. Energy, 2022, 258: 124803
- [19] Reyes-Belmonte M A, Sebastián A, Romero M, et al. Optimization of a Recompression Supercritical Carbon Dioxide Cycle for an Innovative Central Receiver Solar Power Plant [J]. Energy, 2016, 112: 17-27